Capítulo 7

Trabajo y energía

Los conceptos de trabajo y energía son de gran importancia en la ciencia y en la ingeniería. En general se está acostumbrado a pensar en la energía como en algo que se encuentra en función de cosas menos abstractas como la electricidad que puede producir movimiento o iluminación. Es decir, cuando decimos iluminación, casi instantáneamente estamos asociando la electricidad o la corriente eléctrica. Lo que sucede en este caso es que se realiza un trabajo sobre los electrones suministrándoles una cantidad de energía para que estos se desplacen a través de una trayectoria cerrada pasando por un filamento donde esta energía se transforma en luz y calor. Es decir, se piensa en la energía que tiene un cuerpo, en este caso los electrones, para realizar un trabajo. Ahora bien, trabajo se puede definir como la fuerza ejercida por un agente sobre un cuerpo para que este último se desplace una distancia específica. Dado que los conceptos de trabajo y energía están fundamentados en las leyes de Newton, es posible hacer uso de estas ideas para describir el movimiento de un cuerpo. En este capítulo se describirán algunas técnicas que permitirán la descripción del movimiento haciendo uso de los conceptos de trabajo y energía.

7.1. Producto escalar

No obstante el producto escalar de vectores fue estudiado en el capítulo II, vale la pena regresar a él y recordar algunos elementos claves a tener en cuenta. En primer lugar, es conveniente precisar que el *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, da como resultado un escalar; así mismo, que tal producto representa una medida de la proyección de un vector, en este caso $\vec{A}$, sobre otro vector que aquí es llamado vector $\vec{B}$. Tal producto escalar está definido operacionalmente como el producto de la magnitud del vector $|\vec{A}|$ y la magnitud del vector $|\vec{B}|$ por el coseno del ángulo que forman estos vectores entre sí:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \tag{7.1}$$

Si el vector $\vec{A} = (A_x\hat{\imath}, A_y\hat{\jmath}, A_z\hat{k})$ y el vector $\vec{B} = (B_x\hat{\imath}, B_y\hat{\jmath}, B_z\hat{k})$, el producto escalar de estos dos vectores será:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \tag{7.2}$$

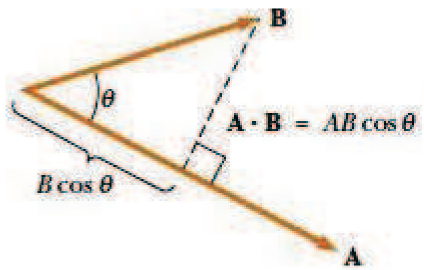

Figura 7.1: producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{A}$ donde se muestra una medida de la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$ definida como $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$.

En la figura 7.1 se muestra el producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{A}$, definido como una medida de la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$; como se mencionó, tal medida está definida por el producto de las magnitudes de ambos vectores y el coseno del ángulo existente entre ambos vectores. Se verifica, a partir de esta definición, que el producto escalar entre ellos da como resultado un escalar. De igual forma, se puede establecer que este producto escalar es conmutativo, es decir, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

7.2. Trabajo realizado por una fuerza constante

Suponga que se quiere mover un mueble, levantar una pila de libros del piso a un estante alto o empujar un automóvil averiado a la orilla del camino. Intuitivamente se puede estar de acuerdo en que para hacer cualquiera de estas labores es necesario realizar un trabajo que está asociado a una actividad que requiere de esfuerzo muscular. Ahora bien, en física el asunto es más preciso, supóngase que al bloque mostrado en la figura 7.2 se aplica una fuerza $\vec{F}$ con el propósito de desplazarlo una distancia Δr. La fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo W para desplazar este bloque la distancia Δr. De hecho, en la figura se observa que no es la totalidad de la fuerza aplicada al bloque la que realiza el trabajo mencionado, es decir, se puede verificar que es la componente de dicha fuerza en dirección del desplazamiento del bloque la que realiza tal trabajo. Así las cosas, se puede definir el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el bloque mostrado en la figura para desplazarlo una distancia Δr como:

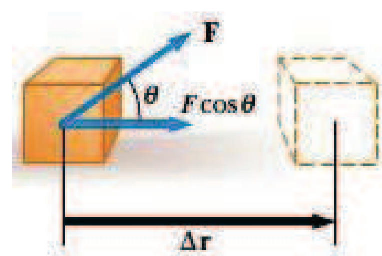

Figura 7.2: fuerza $\vec{F}$ aplicada a un bloque para desplazarlo una distancia Δr.

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{\Delta r}| \cos\theta \tag{7.3}$$

En esta ecuación θ representa el ángulo formado entre los vectores fuerza $\vec{F}$ y desplazamiento $\vec{\Delta r}$. De acuerdo con lo anterior es posible afirmar lo siguiente:

> *El trabajo W efectuado sobre un cuerpo por un agente externo que ejerce una fuerza constante es el producto de la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento y la magnitud de dicho desplazamiento.*

De igual forma se puede notar que la ecuación 7.3 no es otra cosa que la definición de producto escalar entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{\Delta r}$; por lo tanto, se puede expresar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el bloque para desplazarlo $\vec{\Delta r}$ como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \tag{7.4}$$

De la ecuación anterior se puede notar que el trabajo puede ser positivo, negativo o cero. El trabajo W realizado por una fuerza es positivo si la fuerza es aplicada en la misma dirección del desplazamiento, negativa en caso contrario y cero si la fuerza es aplicada de forma perpendicular al desplazamiento.

Por último es necesario señalar que, si se considera el trabajo como una *transferencia de energía*, se dice que la energía es transferida al sistema cuando se realiza un trabajo positivo y que la energía es transferida desde el sistema si el trabajo es negativo.

7.3. Trabajo realizado por una fuerza variable

En el capítulo anterior se estudió el trabajo realizado por fuerzas constantes que producen movimientos rectilíneos, mas ¿qué sucede cuando la fuerza que realiza trabajo varía tanto en magnitud como en dirección? Por ejemlo, ¿qué sucede cuando se estira un resorte? Es evidente que cuanto más estiramos el resorte, mayor es la fuerza que se debe hacer y, por lo tanto, estamos en presencia de un trabajo realizado por una fuerza variable. Considérese un movimiento rectilíneo producido por una fuerza dirigida sobre la línea con una componente F_x dirigida sobre el eje X la cual varía conforme se mueve el cuerpo, por ejemplo, un tren que se mueve en línea recta y está sometido a aceleración y a frenado. La gráfica de fuerza contra desplazamiento que describe tal situación se muestra en la gráfica 7.3. Para determinar el trabajo realizado por esta fuerza F_x, se divide el desplazamiento total en pequeños elementos infinitesimales Δx. Entre más pequeño sea el elemento Δx, la fuerza F_x en ese segmento se puede considerar constante y el trabajo realizado por esta fuerza en ese pequeño segmento está dado por:

$$\Delta W = F_x \Delta x$$

Con lo cual se establece, de acuerdo con el cálculo integral, la definición de una integral definida y, por lo tanto:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \tag{7.5}$$

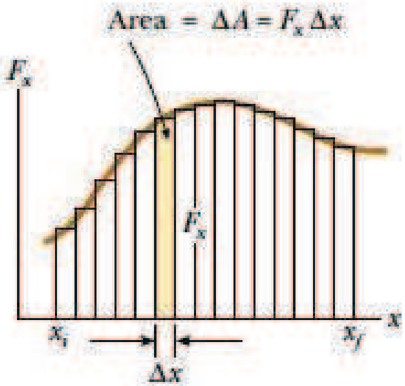

Figura 7.3: gráfica de fuerza contra desplazamiento para una fuerza variable de componente F_x en X.

Así, el trabajo realizado durante todo el desplazamiento será:

$$W = F_{x_1}\Delta x_1 + F_{x_2}\Delta x_2 + ... + F_{x_n}\Delta x_n$$
$$\Longrightarrow W = \sum_{i=0}^{n} F_{x_i}\Delta x_i$$

Ahora bien, si en la última ecuación se hace que Δx sea cada vez más pequeño, tendiendo a cero, se obtiene:

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} F_{x_i}\Delta x_i$$

Considerando lo anteriormente descrito, para el caso de un resorte como el mostrado en la figura 7.4 se verifica que para estirar el resorte es necesario realizar un trabajo aplicando una fuerza que aumenta de forma proporcional al estiramiento, de tal forma que:

$$W = \int_0^x F_x dx$$

Y como la fuerza sobre un resorte está definida como $\vec{F} = k\vec{x}$, entonces:

$$W = \int_0^x kx dx$$

Por lo tanto el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque será:

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.6}$$

Ahora, si se considera el resorte inicialmente estirado, entonces el trabajo total estará determinado por:

$$W = \frac{1}{2}k{x_f}^2 - \frac{1}{2}k{x_i}^2 \tag{7.7}$$

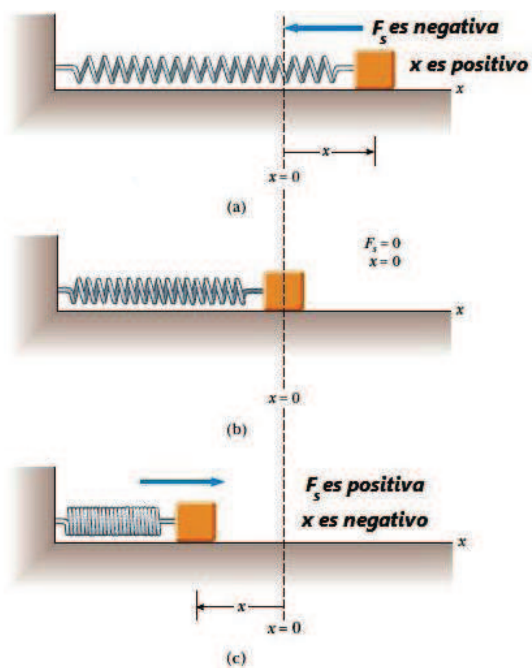

Figura 7.4: fuerza ejercida por un resorte sobre un bloque.

7.4. Trabajo y energía cinética

En alguna situaciones puede resultar complicado usar la segunda ley de Newtom para dar solución a problemas de movimiento que involucran la presencia de fuerzas complejas. Para el tratamiento de este tipo de problemas de movimiento se relaciona la rapidez de la partícula en movimiento con el desplazamiento bajo la acción de alguna fuerza neta.

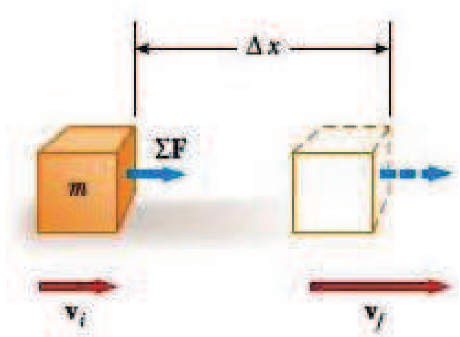

Figura 7.5: gráfica de fuerza aplicada a un bloque para moverlo una distancia Δx ocasionando un cambio en la velocidad del mismo.

En la figura se muestra un bloque que se mueve hacia la derecha bajo la acción de una fuerza constante. Dado que la fuerza sobre el bloque es constante, entonces su aceleración también será constante. Ahora bien, si el bloque se mueve una distancia Δx, el trabajo neto efectuado por la fuerza $\sum F$ está dado por:

$$\sum W = (\sum F)\Delta x \;\Rightarrow\; \sum W = (ma)\Delta x$$

Ahora, recordando algunas ecuaciones del movimiento unidimensional con aceleración constante se tiene:

$$x_f - x_i = \tfrac{1}{2}(v_{xf} + v_{xi})t \quad \text{y} \quad v_{xf} = v_{xi} + a_x t$$

$$\sum W = m\left[\tfrac{v_{x_f} - v_{x_i}}{t}\right]\tfrac{1}{2}\left(v_{x_f} + v_{x_i}\right)t \;\Rightarrow\; \sum W = \tfrac{1}{2}m\left[v_{x_f}^2 - v_{x_i}^2\right]$$

$$\sum W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{7.8}$$

En la ecuación 7.8 el término $\frac{1}{2}mv^2$ representa la energía asociada a la masa y velocidad de una partícula y recibe el nombre de *energía cinética*, la cual se representa con la letra mayúscula K. Así, es posible afirmar que el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al cambio de su energía cinética; es decir:

$$\sum W = K_f - K_i = \Delta K \tag{7.9}$$

La ecuación 7.9 es conocida como el *teorema trabajo energía cinética* y afirma que el trabajo neto realizado sobre un cuerpo es igual al cambio en la energía cinética del mismo. A partir de este teorema se puede verificar que la rapidez de una partícula aumenta si el trabajo neto realizado sobre ella es positivo ya que su energía cinética final es mayor que la energía cinética inicial; y será negativo en caso contrario. De igual manera es necesario señalar que cuando se hace uso del teorema trabajo energía cinética, se deben incluir todas las fuerzas que efectúan trabajo sobre la partícula en el cálculo del trabajo neto realizado.

7.5. Potencia

Hasta el momento en el análisis y las definiciones dadas acerca del trabajo no se menciona para nada el tiempo. Ahora bien, en muchas ocasiones es conveniente y necesario conocer la rapidez con la cual una fuerza realiza trabajo sobre un cuerpo. Por ejem-plo, supóngase que se levanta un bloque cuyo peso es de 400 N una distancia vertical de $0,5$ m con velocidad constante; si se considera que la aceleración gravitacional es de aproximadamente 10 $\frac{m}{s^2}$, entonces el trabajo realizado para levantar el bloque será de 200 J, así el tiempo que se tarde en realizar tal trabajo sea de 1 s, 1 h o un año. Entonces, a esta relación que existe entre el trabajo y la rapidez con la que éste se realiza es a lo que se denomina potencia. Es decir, *la potencia es la rapidez con la cual se transfiere energía.*

Ahora, si se supone que se realiza un trabajo ΔW durante un intervalo Δt, entonces el trabajo medio efectuado por unidad de tiempo o lo que se denomina *potencia media* se define como:

$$\bar{P}(t) = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{7.10}$$

Mas la rapidez con la cual se efetúa trabajo puede no ser constante y al contrario ésta varíar con el tiempo. Cuando la potencia varía con el tiempo se denomina *potencia instantánea* y operacionalmente está dada como el límite de la potencia media cuando el Δt tiende a cero, es decir:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{7.11}$$

La unidad del Sistema Internacional para la potencia es el Watt (W), la cual se refiere a la energía de un Joule que se transfiere en un segundo:

$$[1\ W] = \frac{[1\ \ J]}{[1\ \ s]}$$

En el Sistema Inglés, el trabajo se expresa en pies-libra y por lo tanto la potencia tiene unidades de pies-libra sobre segundo. También se usa de forma común el caballo de fuerza (hp):

$$[1\ hp] = [550\ ft * \tfrac{lb}{s}]$$

Como factor de conversión de uno de estos sistemas a otro se hace uso de:

$$[1\ hp] = [746\ W]$$

Por último, también es posible expresar la potencia en términos de fuerza y de velocidad. Supóngase que $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre un cuerpo que desarrolla un desplazamiento $\Delta\vec{s}$. Si se considera que F' es la componente de $\vec{F}$ que está en la misma dirección del desplazamiento, entonces el trabajo realizado por tal fuerza es:

$$\Delta W = F'\Delta s \;\Rightarrow\; \bar{P} = \frac{F'\Delta s}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \bar{P} = F'\bar{v}$$

Si se pretende obtener la potencia instantánea, entonces:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{P} \Longrightarrow\; P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{7.12}$$